Grundlagenwissen Mathematik

Übergang in die Oberstufe

Inhaltsverzeichnis:

1. Rechnen mit Zahlen

Aufgabe 1.1

Berechnen Sie:

a) $x + 0$ b) $0 \cdot (-8)$ c) $4 : 0$

d) $\frac{0}{12}$ e) $-\frac{6}{0}$ f) $(4 - 2) \cdot 0$

g) $12 - (3 \cdot 4 - 2 \cdot 6)$ h) $4 : (-9 + 3 \cdot 3)$

i) $4 + (5 - 5)(3 - 4)$ j) $(1 - 3)(6 - 2 \cdot 3)(-5 + 4)$

k) $\frac{4+0}{(0+4)} + 1$ l) $\frac{0}{(3-4(2-1))}$

Aufgabe 1.2

Berechnen Sie **ohne** Verwendung des Taschenrechners:

a) -1^2 b) $(-1)^2$ c) $-1^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 2^2$

d) -1^3 e) $(-1)^3$ f) $(-1)^3 - (-1)^3$

g) $3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^3$ h) $\frac{1}{2}(2 - 3)(2 + 5)$ i) $-\frac{1}{5}(2 + 3)^2$

j) $2 \cdot (2 - 2 \cdot 0) + 4 \cdot 0 - 4$

Aufgabe 1.3

Berechnen Sie **mit** Verwendung des Taschenrechners, wobei Sie die Ergebnisse gegebenenfalls auf Hundertstel runden.

a) $3(19{,}031 + 18{,}97)$ b) $\sqrt{1{,}5 + 18{,}74}$ c) $18 \pm \sqrt{90 + 54}$

d) $\sqrt{\frac{69{,}378}{\pi}}$ e) $(0{,}92 \cdot 0.9 + 0.07)^{-2}$ f) $\sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1{,}5}{\pi + 3}}$

g) $\sqrt{\frac{4 \cdot 12{,}43}{8{,}8\pi}}$ h) $10 - \sqrt{\frac{2 \cdot (125 - 50)}{\frac{1}{3} \cdot 18}}$

Aufgabe 1.4

Berechnen Sie **ohne** Verwendung des Taschenrechners:

a) $5+\frac{1}{3}-\frac{15}{4}$

b) $8\cdot\left(\frac{5}{12}-1\right)+\frac{1}{2}$

c) $3\frac{1}{6}\cdot 9$

d) $\frac{1}{6}\cdot 9\cdot\frac{28}{13}\cdot 0\cdot\frac{13}{9}$

e) $5:\frac{10}{3}+\frac{5}{6}$

f) $\left(-\frac{3}{2}-5\right)\cdot\frac{1}{4}$

g) $6-\frac{\frac{1}{4}+2}{\frac{12}{8}-1}$

h) $\frac{\frac{2}{7}\cdot 14-\frac{48}{12}}{2}$

i) $\left(\frac{3}{4}+1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$

j) $\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot 3}{\frac{2}{5}-1}$

k) $\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{12}\right)^2$

2. Rechnen mit Termen

Aufgabe 2.1

Ergänzen Sie nachstehende Gleichungen zu allgemeingültigen Gleichungen für a und b !

a. $(\Delta + \nabla)^2 = 4a^2 + \_\_ + b^2$
b. $(\Delta - \nabla)^2 = a^2 - \_\_ + 16b^2$
c. $(3a - \Delta)^2 = \_ + 12a + \_\_$
d. $(\Delta + 5b)^2 = \_\_ + 60b + \_\_$

Aufgabe 2.2

Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie:

a) $\frac{1}{2}(x-3)^2 + 5$

b) $-\frac{1}{2}(x+3)^2 - 18$

c) $-\frac{1}{4}(x-4)^2 - 4$

d) $\frac{1}{2}(x-2)(x+3)$

e) $-x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x+1)$

f) $\frac{1}{4}(x+1)(x-2)^2$

Aufgabe 2.3

Setzen Sie in den Term für x die angegebene Zahl ein und berechnen Sie a:

a) $x - a = 5$ $\quad x = 0$

b) $a - 5x = 1$ $\quad x = 0$

c) $3x^2 - 4ax - a = 5$ $\quad x = 0$

d) $-5 = a\cdot(x-3)$ $\quad x = 2$

e) $-5 = a\cdot(x-3)$ $\quad x = -3$

f) $x^2 - 5ax + 2a = 0$ $\quad x = -1$

Aufgabe 2.4

Setzen Sie in die folgenden drei Terme

T1: x^2 T2: $-x^2+2x$ T3: x^3-2x+1

für x jeweils den Term

a) $x+2$ b) $1-x$ c) πx d) $2x$ e) $-x^2$ ein

und vereinfachen Sie soweit möglich.

f) Subtrahieren Sie die Terme T1, T2 bzw. T3 paarweise voneinander. Schöpfen Sie dabei alle Kombinationsmöglichkeiten aus.

Aufgabe 2.5

Berechnen Sie den Wert von a ohne Verwendung des Taschenrechners :

a) $a=\dfrac{6}{\frac{3}{2}}$ b) $a=\dfrac{-\frac{4}{3}}{6}$ c) $a=4\frac{2}{3}-6+\frac{11}{6}$ d) $a=\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse jetzt mit dem Taschenrechner !

Aufgabe 2.6

Im Alltag werden Brüche meist als Dezimalbrüche, wie z.B.: 2,4 angeben.
2,4 lässt sich jedoch problemlos wieder in eine gewöhnliche Bruchzahl umwandeln, wie die folgende Rechnung zeigt: $2{,}4=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$

Schreibe die Ergebnisse folgender Terme als eine Bruchzahl:

a) $6{,}5:\frac{2}{3}$ b) $-\frac{3}{5}:0{,}3$ c) $\dfrac{\frac{1}{3}+2}{0{,}45+\frac{1}{20}}$

3. Gleichungen

Aufgabe 3.1

a) $2(3x - 4) = 5x$

b) $-3(x - 5) = 15$

c) $x - 2(x - 1) = 3x - (20 - 5x)$

d) $4(x - 1) = 16$

e) $4(3 - 2x) = -5x$

f) $2x - 1 + 6(2x + 1) = 16x - (2x - 7)$

g) $(x + 2)^2 - (x - 4)^2 = 2(x - 4) + 9x$

h) $(3x - 2)^2 - 3(x - 1)^2 = -(3x + 2)(3 - 2x)$

i) $(x + 4)^2 - (x - 3)(x + 3) = 3(x - 10)$

Aufgabe 3.2

a) $(x - 4)(3x - 7) = (x - 2)(3x + 8)$

b) $2(x - 4) + x^2 = 4 - (x + 2)(3 - x)$

c) $(3x + 5)^2 - (4x+1)^2 = -(2x - 3)^2 - 3(x + 1)(x - 1)$

Aufgabe 3.3

Quadratische Gleichungen lösen wir am WG mit drei verschiedenen Methoden

A: Wurzelziehen bei reinquadratischen Gleichungen
B: Satz vom Nullprodukt
C: „Mitternachtsformel“ $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Lösen Sie jeweils mit der optimalen Methode:

a) $-x^2 + x + 2 = 0$ b) $4x^2 = 24x - 36$ c) $3x^2 - 12x = 0$

d) $5x^2 = 10$ e) $12 - (x + 6)^2 = 2x$ f) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = 0$

g) $0{,}25x^2 - 0{,}2x = 0$ h) $2(x - 1)(x + 3) = 0$ i) $(x + 3)^2 = 1$

j) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{27}{16} = 0$ k) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ l) $\frac{1}{\sqrt{3}}x^2 - 3x + 2\sqrt{3} = 0$

Aufgabe 3.4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen jeweils nach der angegebenen Variablen auf:

a)	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$	nach r
b)	$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$	nach c
c)	$u = 2(a + b)$	nach b
d)	$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$	nach a
e)	$b = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360}$	nach α
f)	$K = \frac{100 \cdot Z}{i \cdot p}$	nach p
g)	$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$	nach r

4. Geraden

Aufgabe 4.1

Eine Ursprungsgerade geht jeweils durch den Punkt P.
Geben Sie die Gleichung an.

a) P(6|3) b) P(–2|4) c) P(6|–3) d) P(–2|–4)

Aufgabe 4.2

Zeichnen Sie die durch die jeweilige Gleichung gegebene Gerade samt Steigungsdreieck.

a) y = 2x + 1 b) y = 1,5x – 1 c) $y = -\frac{8}{3}x + 4$

Aufgabe 4.3

Gegeben ist die Gerade g mit $y = 2x - 2$.

a) Liegen die Punkte A(15|28) und B(–9|20) auf g?

b) Ermittle die Gleichung der Geraden *h*, die parallel zu *g* ist und durch den Punkt $P(1|5)$ verläuft!

c) In welchen Punkten schneiden die beiden Graphen die *y*-Achse?

d) Der Punkt $Q(-1|y)$ liegt auf der Geraden *h*. Berechne die *y*-Koordinate von *Q*.

e) Der Punkt $R(x|\frac{1}{2})$ liegt auf der Geraden *g*. Berechne die *x*-Koordinate von *R*.

f) Ermitteln Sie die Gerade *k* durch die Punkte *Q* und *R* zeichnerisch.
Bestätigen Sie Ihre Lösung rechnerisch.

g) Zeichnen Sie alle drei Geraden in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

Aufgabe 4.4

Im rechtwinkligen Koordinatensystem (1 LE = 1 cm) liegt das Viereck mit den Punkten A(0|0), B(1|0), C(4|6), D(0|4).

a) Geben Sie die Gleichungen der Geraden durch die Punkte A und B, B und C, C und D sowie A und D an.

b) Berechnen Sie alle Innenwinkel des von den Punkten A, B, C und D begrenzten Vierecks.

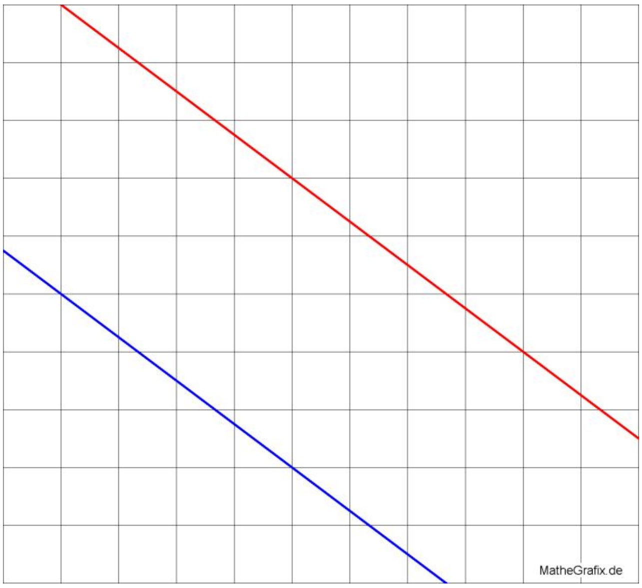
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang dieses Vierecks.

Aufgabe 4.5

Die Gerade g geht durch die Punkte A(–3|–2) und B(9|2).

a) Zeichnen Sie diese Gerade in ein geeignetes Koordinatensystem.
b) Bestimmen Sie die Geradengleichung.
c) Welchen Winkel bilden g und die x-Achse?
(zeichnerische und rechnerische Lösung)
d) Wie groß ist der Abstand der Punkte A und B?
(zeichnerische und rechnerische Lösung)
e) Spiegeln Sie die Gerade g an der durch x = 3 gekennzeichneten Gerade und geben Sie deren Gleichung an.

Aufgabe 4.6



a) Zeichnen Sie in die Abb. ein rechtwinkliges Koordinatensystem Ihrer Wahl samt Achsenskalierung.

Geben Sie in Ihrem Koordinatensystem die Gleichung einer jeden Gerade an.

b) In welchem Koordinatensystem hat die obere Gerade die Gleichung
$$y = -\frac{3}{2}x + 30 \text{ ?}$$
Zeichnen Sie auch dieses Koordinatensystem samt Skalierung ein.

Aufgabe 4.7

Zwei Anbieter von Öko-Strom haben folgende Tarife:

Firma	Feste Gebühren pro Jahr in €	Gebühren pro kWh in €
Sonnenstrahl AG	114	0,34
Wasserkraft GmbH	60	0,37

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für beide Anbieter, und zwar für folgenden Energiebedarf in kWh/Jahr 0; 1; 1000; 2000; 3000; 4000; 5000

b) Erstellen Sie ein Diagramm, aus dem die jährlichen Stromgebühren für beide Anbieter abgelesen werden können.
Welche Bedeutung hat der Schnittpunkt der beiden Geraden?

c) Ermitteln Sie rechnerisch, bei welchem jährlichen Energiebedarf beide Anbieter gleich günstig sind.

d) Ein vier Personenhaushalt benötigt im Jahr 3900 kWh elektrischer Energie.
Wie groß ist die Einsparung, wenn er den preisgünstigeren Anbieter nimmt?

5. Parabel (Nur falls als Wahlthema bereits behandelt)

Aufgabe 5.1

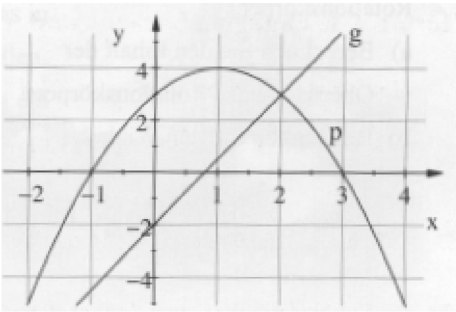
Die Parabel p ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$p: y = x^2 + bx + 4$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen für b = 5.
b) Für welche Zahlen b hat die Parabel p genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse?

Aufgabe 5.2

Gegeben sind die Parabel $p: y = -x^2 + 2x + 3$ und die Gerade g durch die Abbildung.



a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von p und g.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Scheitelpunkt der Parabel p.

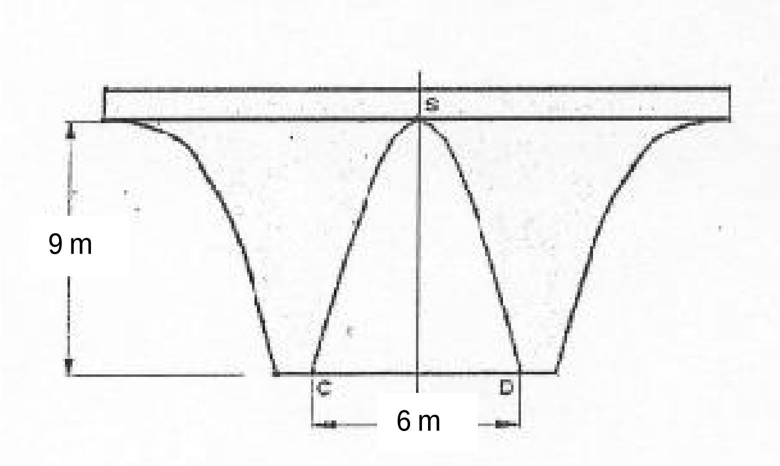
Aufgabe 5.3

Für jede reelle Zahl c ist eine Parabel p durch folgende Gleichung gegeben:

$$p: y = x^2 - 6x + c$$

a) Bestimmen Sie für c = 3 die Scheitelform und zeichnen Sie die Parabel in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
b) Welche Bedingung muss für c gelten, damit die Parabel zwei Nullstellen hat?

Aufgabe 5.4



Die Abbildung zeigt den Plan einer Brücke. Die Punkte C, D und S liegen auf einer Parabel.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

b) Unter dem mittleren Brückenbogen führt eine 6 m breite Straße durch. Kann ein Schwertransporter mit einer Breite von 4,80 m und 3,60 m Höhe unter dieser Brücke durchfahren?

6. Textverständnis

Aufgabe 6.1

Was kostet ein Polarhund?

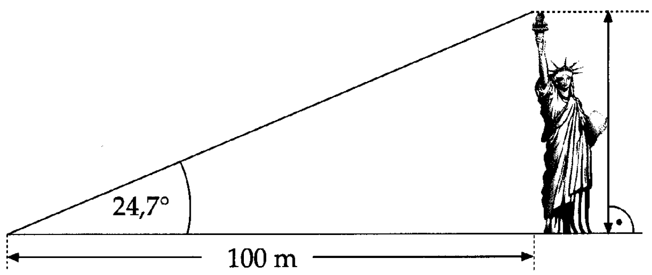
Ein Eskimo aus Grönland kauft einen wertvollen Leithund für sein Schlittengespann.

„Der Hund und das Halsband kosten zusammen 110 dänische Kronen", sagt der Verkäufer. „Wenn ich dir sage, dass der Hund 100 Kronen mehr kostet als das Halsband, musst du zugeben, dass ich dir das Lederzeug fast schenke!"

Wie viele dänische Kronen bezahlt er für den Hund und wie viel kostet das Halsband?

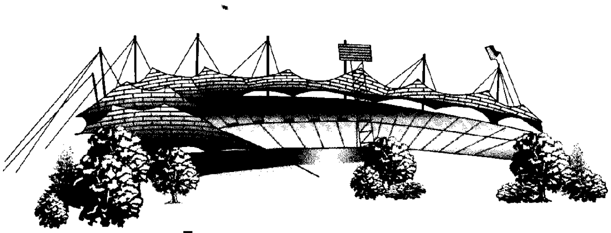
Aufgabe 6.2

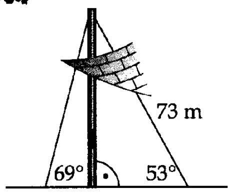
Wie hoch ist das Symbol der Weltstadt New York, wenn die Fackel der Freiheitsstatue unter einem Winkel von 24,7° aus 100 m Entfernung gesehen wird?



Aufgabe 6.3

Zwei Abspannseile eines Trägermastes des Olympiastadiondaches in München haben die Neigungswinkel von 69° und 53°.



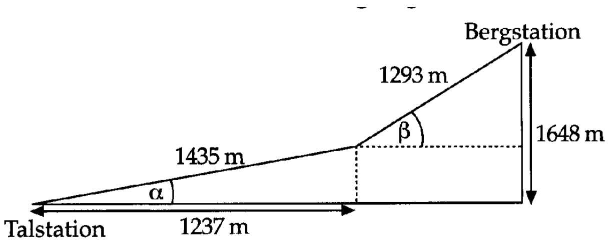


a) In welcher Höhe sind die Seile befestigt, wenn das Seil mit dem Neigungswinkel 53° eine Länge von 73 m hat?

b) Wie lang ist das andere Seil?
Wie weit sind die Seilbefestigungen am Boden vom Fußpunkt des Mastes entfernt?

Aufgabe 6.4

Ein Skilift hat von der Talstation bis zur Bergstation zwei verschiedene Steigungen zu überwinden. Berechne die beiden Steigungswinkel α und ß.



Aufgabe 6.5

Bei einer Mathematikarbeit können max. 30 Punkte erreicht werden. Die Zuordnung der Korrekturpunkte zu den Noten erfolgt mithilfe eines Terms. Der auf Zehntel gerundete Wert dieses Terms gibt die Note an. Bei 30 Korrekturpunkten soll die Note 1,0 und bei 15 Korrekturpunkten die Note 3,5 erteilt werden.
Stelle einen geeigneten Term für die Note n auf.

Aufgabe 6.6

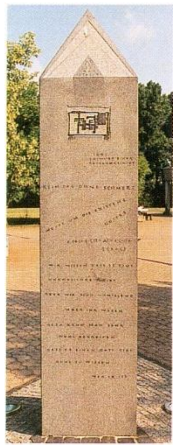
Zwei Grundstücksbesitzer möchten ihre Grundstücke tauschen.
Beide Grundstücke sind rechteckig und haben denselben Flächeninhalt. Das Grundstück von Besitzer B ist zwar 7 m kürzer, dafür aber um 4 m breiter als das von Besitzer A. Besitzer A hat sein Grundstück mit einem 124 m langen Zaun umzäunt. Diesen Zaun möchte er nach dem Tausch an dem neuen Grundstück anbringen.

Wird die Zaunlänge reichen?

Aufgabe 6.7

Im Hof des Pascal-Gymnasiums steht ein Denkmal für Blaise Pascal.
Es besteht aus Granit und hat eine Gesamthöhe von 2,50 m.
Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 30 cm. Die Pyramide ist 43 cm hoch. 1 dm^3 Granit wiegt 2,9 kg.

Wie schwer ist das Denkmal?



Quelle: http://modellversuch-mathematik.he.schule.de/Materialien/Word-Dokumente/15Oberfl%E4chen%20und%20Volumina.doc

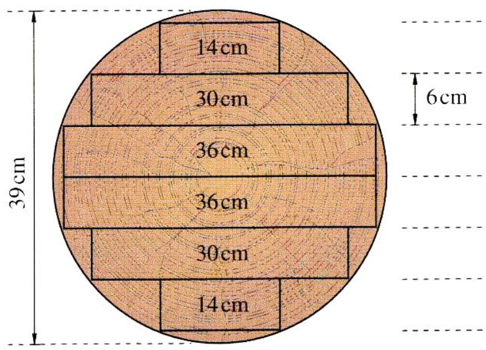
Aufgabe 6.8

Aus einem 39 cm dicken und 7 m langen Baumstamm sollen Dielen gesägt werden wie in nebenstehender Abbildung angegeben.

a) Berechne das Volumen des Baumstamms.

b) Wie viel m^3 Holz kann für die Dielen genutzt werden? Wie viel Prozent beträgt der Schnittverlust

c) Wenn die Dielen eine Dicke von 1,5 cm haben sollen, wie viel m^2-Wohnfläche können damit ausgelegt werden?



Quelle: http://modellversuch-mathematik.he.schule.de/Materialien/Word-Dokumente/15Oberfl%E4chen%20und%20Volumina.doc

Aufgabe 6.9

Gabi möchte für eine Klassenfeier Orangensaft kaufen. Ein Händler bietet diesen in drei Verpackungsgrößen an:

1/3 Liter	Getränkekartons	für 0,44 €
0,75 Liter	Glasflaschen	für 0,89 €
2,5 Liter	Jumbopacks	für 2,75 €

a) Wie viel kostet jeweils ein Liter Orangensaft?

b) Um wie viel Prozent ist die gleiche Menge Orangensaft aus den Getränkekartons teurer als der Saft aus den Glasflaschen?

c) Gabi soll 12 Liter Saft kaufen! Wie viel muss sie mindestens bezahlen? (Natürlich darf Gabi auch mehr Saft kaufen, wenn sie dadurch Geld sparen kann!)

d) Wie viel muss Gabi mindestens bezahlen, wenn sie **genau** 12 Liter Saft mitbringen soll?

e) 100 ml Orangensaft enthalten 40 mg Vitamin C. Das sind 66% des Tagesbedarfs eines Schülers. Wie viele Schüler könnten ihren Tagesbedarf an Vitamin C mit 12 Liter Saft decken?

f) Die Grundfläche der Jumbopacks ist 10 cm breit und 12,5 cm lang. Bestimme die Höhe der Behälter!

g) Der Hersteller der Jumbopacks plant, 5 l-Behälter auf den Markt zu bringen. Dazu möchte er die Breite der Packs verdoppeln. Wie viel Prozent Verpackungsmaterial spart er im Vergleich zu zwei 2,5 l-Behältern?
Hinweis: *Die Klebekanten müssen bei diesem Aufgabenteil nicht berücksichtigt werden.*

Quelle: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/60/Aufgabensammlung_der_Arbeitsgruppe_Mathematik.doc

7. Herausforderungen (optional)

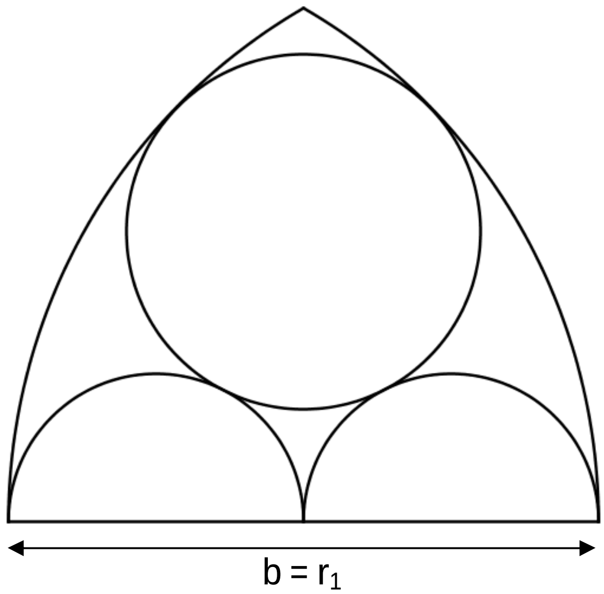
Aufgabe 7.1

Ein Schiff fährt in konstantem Abstand von 15 km einmal um eine Insel herum. Die Insel hat die Form eines gleichseitigen regelmäßigen Dreiecks (Vierecks, Sechsecks) und besitzt eine Küste von 400 km Länge.

Wie lang ist der Weg, den das Schiff jeweils zurückgelegt hat?

Aufgabe 7.2

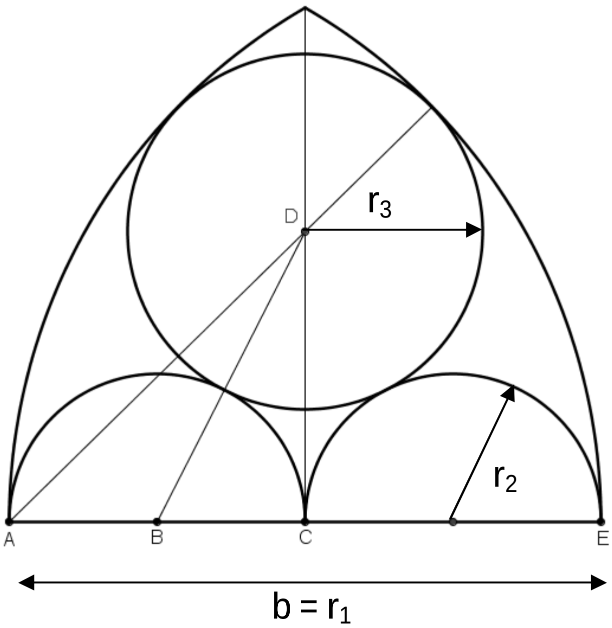
Die Skizze zeigt einen gotischen Spitzbogen.
Berechnen Sie alle vorkommenden Kreisradien
in Abhängigkeit der Basislänge b.



TIPPS gibt es auf der nächsten Seite!

Aufgabe 7.2 (Jetzt mit Tipps)

Die Skizze zeigt einen gotischen Spitzbogen.
Berechnen Sie alle vorkommenden Kreisradien in Abhängigkeit der Basislänge b.



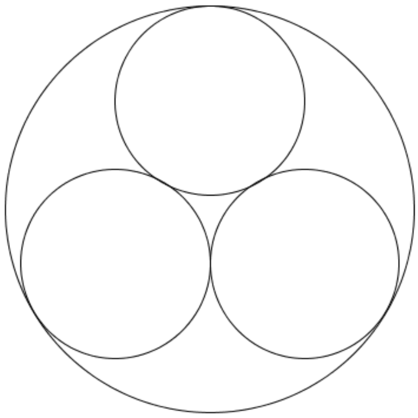
Tipps:

- Satz des Pythagoras
- Hilfslinien (vgl. Skizze)
- angegebene Punkte und Bezeichner

Aufgabe 7.3

Wie viel Prozent der Fläche des großen Kreises werden durch die drei gleich großen kleinen Kreise verdeckt?

Bestimmen Sie zunächst einen Schätzwert.



Tipps:

- Je zwei Seitenhalbierende eines Dreiecks teilen sich im Verhältnis 2:1.
- Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks.
- Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.
- Verwende bei Bedarf: $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$